۳) استخراج ماتریس سختی با معکوس کردن ماتریس نرمی:

در سازه‌ای که از نظر استاتیکی معین باشد، همانند تیری که در شکل Fig. E9.5a نشان داده شده است، معمولاً آسان‌تر است که ابتدا ماتریس نرمی سازه بدست آورده شود و با معکوس کردن آن ماتریس سختی حاصل گردد. ضریب تأثیر نرمی که $\hat{f}_{ij}$ نام دارد، تغییرمکان درجه آزادی iام نشان می‌دهد زمانی که بار واحد روی درجه آزادی jام اعمال گردیده و بارگذاری روی سایر درجات آزادی وجود ندارد. این موضوع در شکل Fig. E9.5 نمایش داده شده است. لازم به یادآوری است که در این روش تغییرمکان‌ها با استفاده از روش‌های استاندارد تحلیل سازه‌ها (مثلاً روش کار مجازی) قابل محاسبه هستند.

محاسبه درایه‌های ماتریس نرمی:

1) ابتدا سیستم تحت بار خارجی قرار می‌گیرد. تابع لنگر خمشی در این حالت M_L نام دارد.

2) سیستم تحت بار واحد قرار داده می‌شود. تابع لنگر خمشی در این حالت M_u نام دارد.

3) با انتگرال‌گیری مقدار تغییرمکان محاسبه می‌شود.

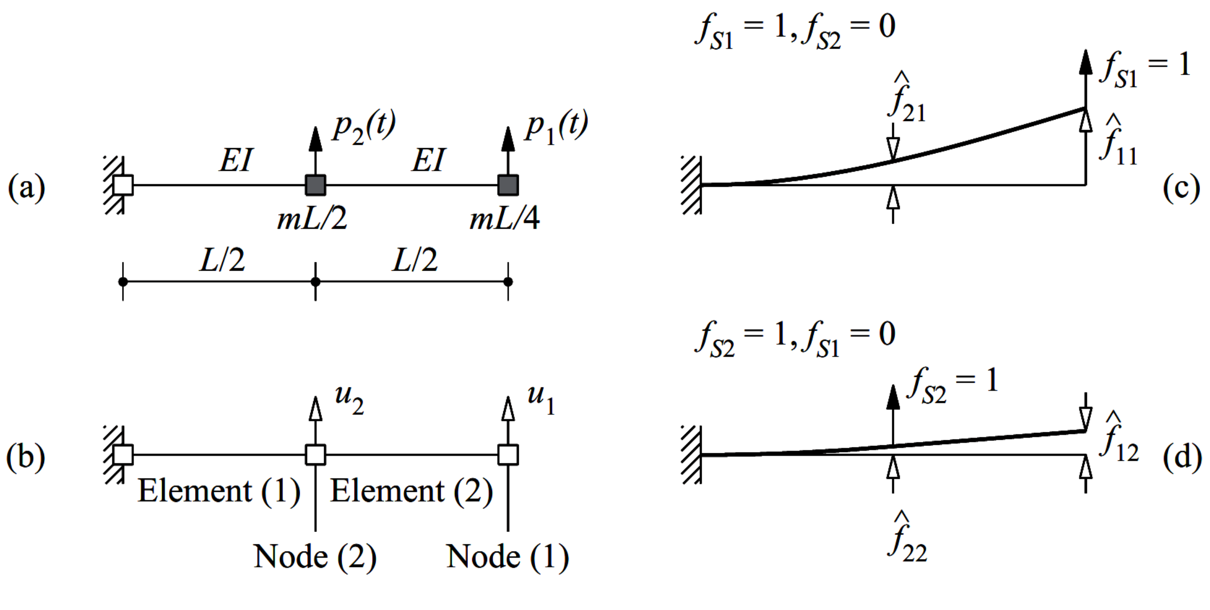


Figure E9.5

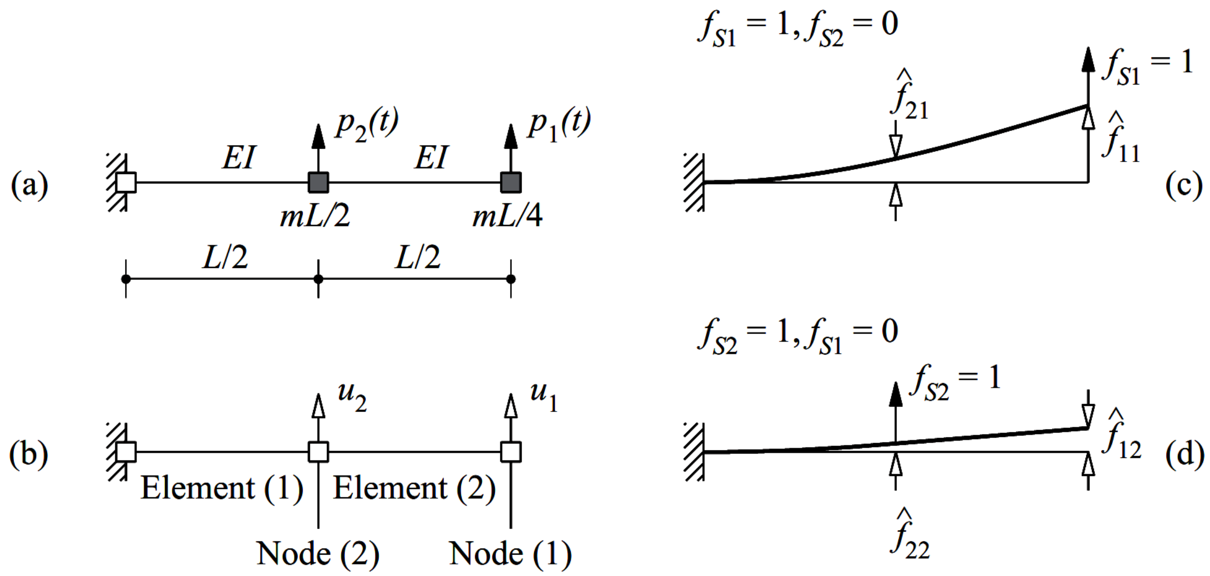


Figure E9.5

۱) ابتدا سیستم تحت بار خارجی قرار می‌گیرد. تابع لنگر خمشی در این حالت M_L نام دارد.

۲) سیستم تحت بار واحد قرار داده می‌شود. تابع لنگر خمشی در این حالت M_u نام دارد.

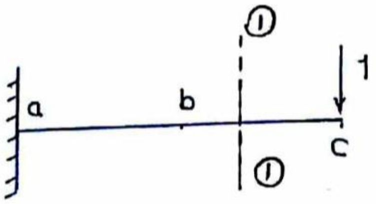
۳) با انتگرال‌گیری مقدار تغییرمکان محاسبه می‌شود.

اعمال بار خارجی روی درجه آزادی j $\longrightarrow M_L$

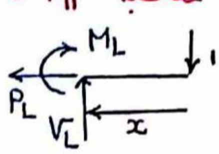
اعمال بار واحد روی درجه آزادی i $\longrightarrow M_u$

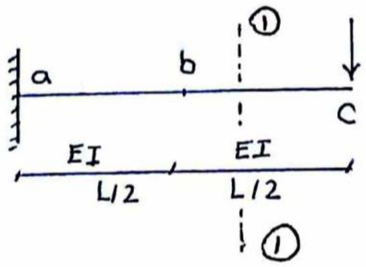
تغییرمکان $\longrightarrow \hat{f}_{ij} = \int \frac{M_L M_u \, dx}{EI}$

محاسبه $\hat{F}_{11}$.

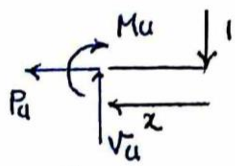


سیستم تحت بار خارجی $\longrightarrow M_L = -x$



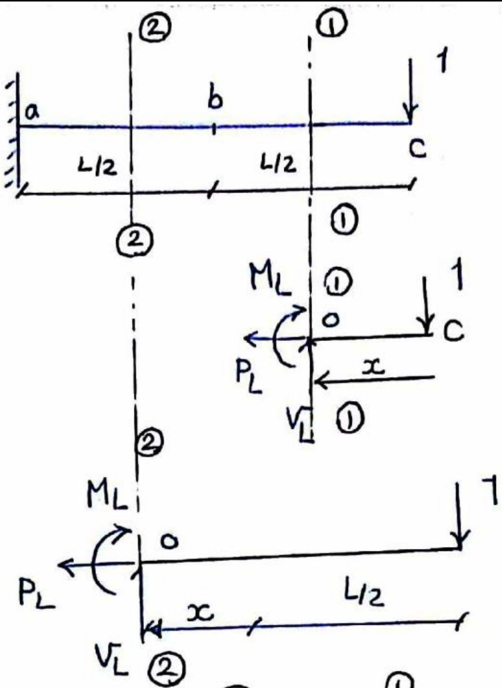


سیستم تحت بار واحد $\longrightarrow M_u = -x$



$$\hat{F}_{11} = \int_0^L \frac{(-x)(-x)\,dx}{EI} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{EI}\Big|_0^L = \frac{L^3}{3EI}$$

محاسبه $\hat{f}_{21}$



۱) سیستم تحت بار خارجی

sec. (1-1)

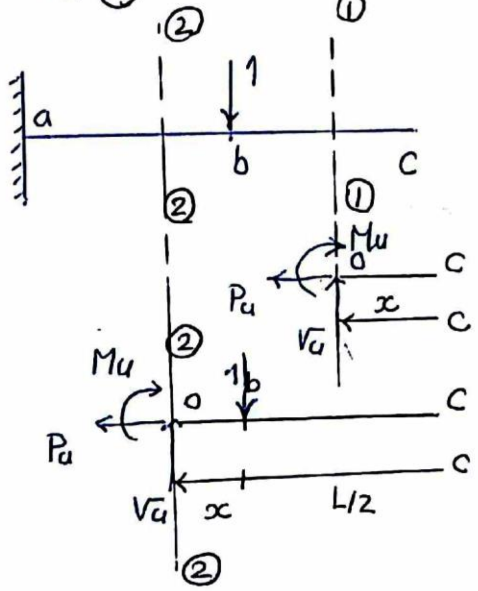
$$\circlearrowleft + \sum M_o = 0 \quad (1\times x) + M_L = 0$$

$$M_L = -x$$

Sec (2-2)

$$\circlearrowleft + \sum M_o = 0 \Rightarrow (x+\frac{L}{2})\times 1 + M_L = 0$$

$$\Rightarrow M_L = -(x+\frac{L}{2})$$



۲) سیستم تحت بار واحد

Sec (1-1)

$$\circlearrowleft + \sum M_o = 0 \rightarrow M_u = 0$$

Sec (2-2)

$$\circlearrowleft \sum M_o = 0 \rightarrow M_u + (1\times x) = 0$$

$$\Rightarrow M_u = -x$$

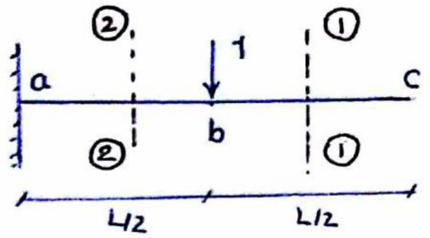
۳) محاسبه تغییر مکان با انتگرال گیری

$$\hat{f}_{21} = \int_0^L \frac{M_L M_u \, dx}{EI}$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{(-x)(0)\,dx}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{-(x+\frac{L}{2})(-x)\,dx}{EI} = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^2+\frac{L}{2}x\,dx}{EI}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{21} = \frac{x^3}{3EI}\Big|_0^{L/2} + \frac{1}{(EI)2}L\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^{L/2} = \frac{L^3}{24EI} + \frac{L^3}{16EI}$$

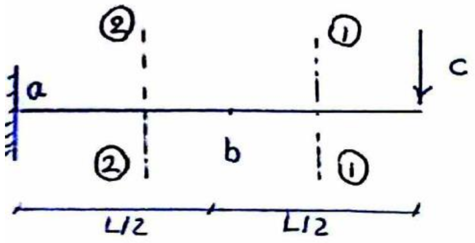
$$\hat{f}_{21} = \frac{5L^3}{48EI}$$



محاسبه ضریب $\hat{f}_{12}$. ۱) سیستم تحت بار خارجی

مشاهده می‌شود M_L برای $\hat{f}_{12}$ مشابه است با

M_u برای $\hat{f}_{21}$ در قسمت قبل



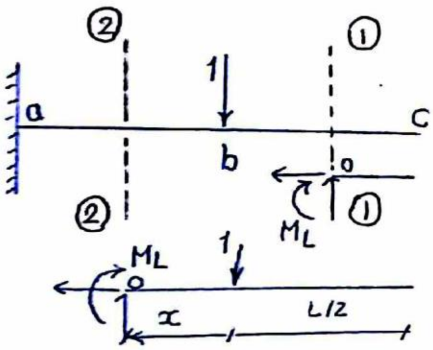
۲) سیستم تحت بار واحد

مشاهده می‌شود که M_u برای $\hat{f}_{12}$ مشابه است

با M_L برای $\hat{f}_{21}$ در قسمت قبل

$$\Rightarrow \hat{f}_{21} = \hat{f}_{12} = \frac{5L^3}{48EI}$$

محاسبه ضریب $\hat{f}_{22}$.



۱) سیستم تحت بار خارجی

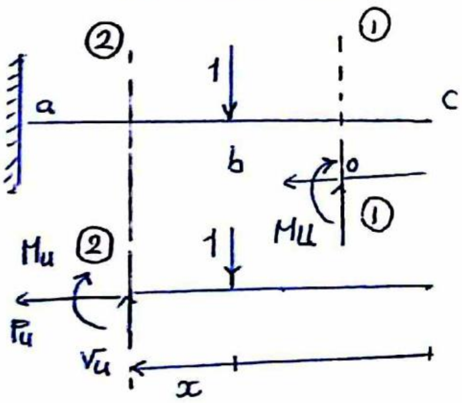
Sec(1-1)

$\circlearrowright + \sum M_o = 0 \Rightarrow M_L = 0$

Sec (2-2)

$\circlearrowright \sum M_o = 0 \Rightarrow M_L + (1 \times x) = 0$

$M_L = -x$



۲) سیستم تحت بار واحد

$\circlearrowright + \sum M_o = 0 \rightarrow M_u = 0$

$\circlearrowright + \sum M_o = 0 \Rightarrow M_u + (1x) = 0$

$M_u = (-x)$

۳) انتگرال گیری

$$\hat{f}_{22} = \int_0^{L/2} \frac{M_L M_u \, dx}{EI} = \int_0^{L/2} \frac{(x)(-x)\, dx}{EI} = \frac{1}{3} \frac{x^3}{EI} \Big|_0^{L/2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{22} = \frac{1}{3EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{L^3}{24EI}$$

$$\rightarrow [\hat{f}] = \begin{bmatrix} L^3/3EI & 5L^3/48EI \\ 5L^3/48EI & L^3/24EI \end{bmatrix} \rightarrow \hat{f} = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که ضرایب تأثیر غیرقطری نسبت به قطر اصلی متقارن هستند، یعنی $\hat{f}_{21} = \hat{f}_{12}$ که که در واقع مطابق با اصل بتی - ماکسول انتظار می رفت. اکنون برای بدست آوردن ماتریس سختی ماتریس نرمی را معکوس می کنیم

$$[k] = [\hat{f}]^{-1} = \frac{48EI}{L^3} \times \frac{1}{(16\times2-5\times5)}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [k] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

تعیین ماتریس جرم. ماتریس $[m]$ به صورت قطری خواهد بود، چراکه جرم های متمرکز در محلی قرار گرفته اند که درجات آزادی تعریف شده است:

$$[m] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix}$$

تعیین معادلات حرکت. با فرض اینکه نیروهای خارجی روی درجات آزادی $P_1(t)$، $P_2(t)$ باشنده داریم:

$$\begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

که در معادلات بالا از میرایی صرف نظر شده است یعنی $[c]=[0]$

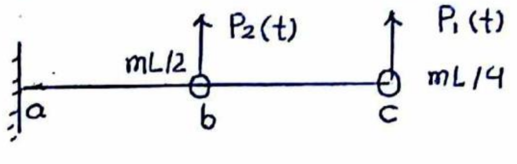
تکنیک تراکم استاتیکی: در تحلیل دینامیکی سازه‌های چند درجه آزادی ممکن است سیستم درجات آزادی داشته باشد که فاقد جرم هستند و بار خارجی $P(t)$ به آنها اعمال نمی‌شود. این درجات آزادی در اصطلاح درجات آزادی استاتیکی نامیده می‌شوند و در مقابل به سایر درجات آزادی (که شامل جرم هستند) درجات آزادی دینامیکی گفته می‌شود.

درجات آزادی استاتیکی (بدون جرم) را به شرط نداشتن نیروهای خارجی ($P(t)$) می‌توان از معادلات تعادل دینامیکی حذف نمود. چنانچه درجات آزادی بدون جرم را با $\{u_0\}$ و درجات آزادی دارای جرم (دینامیکی) را با $\{u_t\}$ نمایش دهیم و متناسب با این درجات ماتریس‌های جرم و سختی را دسته‌بندی کنیم می‌توان نوشت:

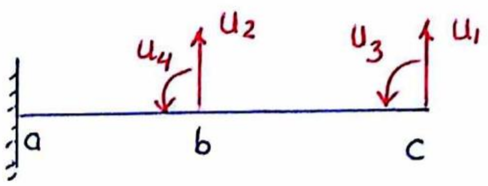
$$\left[\begin{array}{c|c} [m_{tt}] & [0] \\ \hline [0] & [0] \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_t\} \\ \{\ddot{u}_0\} \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} [k_{tt}] & [k_{t0}] \\ \hline [k_{0t}] & [k_{00}] \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \{u_t\} \\ \{u_0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

که در رابطه بالا $[k_{t0}] = [k_{0t}]^T$

تمرین: در مسئله (9.4)، (9.5) ماتریس‌های سختی و جرم را برحسب درجات آزادی دینامیکی و استاتیکی تقسیم‌بندی کنید.



در مسئله 9.4 برای ماتریس‌های جرم و سختی داشتیم که:



$$[m] = \left[\begin{array}{cc|cc} mL/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad ; \quad k = \frac{8EI}{L^3}\left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -12 & -3L & -3L \\ -12 & 24 & 3L & 0 \\ \hline -3L & 3L & L^2 & L^2/2 \\ -3L & 0 & L^2/2 & 2L^2 \end{array}\right]$$

مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_t\} \\ \{u_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \rightarrow \{u_t\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \; ; \; \{u_o\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_t\} \\ \{\ddot{u}_o\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \rightarrow \{\ddot{u}_t\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \; ; \; \{\ddot{u}_o\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix}$$

$$[m] = \left[\begin{array}{cc|cc} mL/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} [m_{tt}] & [m_{to}] \\ [m_{ot}] & [m_{oo}] \end{bmatrix}$$

$$[m_{tt}] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix} = \frac{mL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[m_{to}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0] \; ; \; [m_{ot}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; [m_{oo}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

$$[k] = \frac{8EI}{L^3} \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -12 & -3L & -3L \\ -12 & 24 & 3L & 0 \\ \hline -3L & 3L & L^2 & L^2/2 \\ -3L & 0 & L^2/2 & 2L^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} [k_{tt}] & [k_{to}] \\ \hline [k_{ot}] & [k_{oo}] \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow [k_{tt}] = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix} \; ; \; [k_{to}] = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} -3L & -3L \\ 3L & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{ot}] = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} -3L & 3L \\ -3L & 0 \end{bmatrix} \; ; \; [k_{oo}] = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & L^2/2 \\ L^2/2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$

$[k_{ot}] = [k_{to}]^T$ مشاهده‌ی سختی دیگه

با تقسیم بندی درجات آزادی داشتیم که:

$$\begin{bmatrix} [m_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_t\} \\ \{\ddot{u}_0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{tt}] & [k_{t0}] \\ [k_{0t}] & [k_{00}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_t\} \\ \{u_0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.3.1)$$

اکنون معادلات ماتریسی متناظر با درجات آزادی استاتیکی را از درجات دینامیکی تفکیک می‌کنیم.

$$[m_{tt}]\{\ddot{u}_t\} + [k_{tt}]\{u_t\} + [k_{t0}]\{u_0\} = \{P(t)\} \quad (9.3.2a)$$

$$[k_{0t}]\{u_t\} + [k_{00}]\{u_0\} = \{0\} \quad (9.3.2b)$$

اکنون می‌توان بر اساس رابطه (9.3.2b) رابطه بین بردار درجات آزادی استاتیکی و دینامیکی را بدست آورد:

$$(9.3.2b) \rightarrow [k_{00}]\{u_0\} = -[k_{0t}]\{u_t\}$$

$$\rightarrow \{u_0\} = -[k_{00}]^{-1}[k_{0t}]\{u_t\} \quad (9.3.3)$$

اکنون در معادلات (9.3.2a) بردار $\{u_0\}$ را از رابطه (9.3.3) جایگذاری می‌کنیم:

$$\rightarrow [m_{tt}]\{\ddot{u}_t\} + [k_{tt}]\{u_t\} + [k_{t0}]\left(-[k_{00}]^{-1}[k_{0t}]\{u_t\}\right) = \{P(t)\}$$

$$\rightarrow [m_{tt}]\{\ddot{u}_t\} + \left(\underline{[k_{tt}] - [k_{t0}][k_{00}]^{-1}[k_{0t}]}\right)\{u_t\} = \{P(t)\}$$

$[\hat{k}_{tt}]$: ماتریس سختی تراکم یافته

$$[m_{tt}]\{\ddot{u}_t\} + [\hat{k}_{tt}]\{u_t\} = \{P(t)\}$$

تمرین- ماتریس سختی تراکم یافته را از مسئله (۹.۴) بدست آورید.

$$[\hat{k}_{tt}] = [k_{tt}] - [k_{t0}][k_{00}]^{-1}[k_{0t}]$$

$$[\hat{k}_{tt}] = \frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix} - \left(\left(\frac{8EI}{L^3}\right)\begin{bmatrix} -3L & -3L \\ 3L & 0 \end{bmatrix}\left(\frac{8EI}{L^3}\right)^{-1}\begin{bmatrix} L^2 & L^2/2 \\ L^2/2 & 2L^2 \end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{8EI}{L^3}\right)\begin{bmatrix} -3L & 3L \\ -3L & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$[\hat{k}_{tt}] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

تمرین - در مسئله قبل ارتباط بین درجات آزادی استاتیکی و دینامیکی را بدست آورید.

$$\{u_0\} = -[k_{00}]^{-1}[k_{0t}]\{u_t\}$$

$$\{u_0\} = [T]\{u_t\} \Rightarrow [T] = -[k_{00}]^{-1}[k_{0t}]$$

به ماتریس $[T]$ در اصطلاح ماتریس انتقال هندسی گفته می‌شود.

$$[T] = -[k_{00}]^{-1}[k_{0t}] = -\left(\frac{8EI}{L^3}\right)^{-1}\begin{bmatrix} L^2 & L^2/2 \\ L^2/2 & 2L^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -3L & 3L \\ -3L & 0 \end{bmatrix}\left(\frac{8EI}{L^3}\right)$$

$$\Rightarrow [T] = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 2.57 & -3.43 \\ 0.857 & 0.857 \end{bmatrix} = \frac{1}{7L}\begin{bmatrix} +18 & -24 \\ +6 & +6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{u_0\} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} 2.57 & -3.43 \\ 0.857 & 0.857 \end{bmatrix}\{u_t\}$$

Example 9.6

Formulate the free vibration equations for the two-element frame of Fig. E9.6a. For both elements the flexural stiffness is *EI*, and axial deformations are to be neglected. The frame is massless with lumped masses at the two nodes as shown.

Solution The two degrees of freedom of the frame are shown. The mass matrix is

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Note that the mass corresponding to $\ddot{u}_1 = 1$ is $2m+m = 3m$ because both masses will undergo the same acceleration since the beam connecting the two masses is axially inextensible.

The stiffness matrix is formulated by first evaluating the flexibility matrix and then inverting it. The flexibility influence coefficients are identified in Fig. E9.6b and c, and the

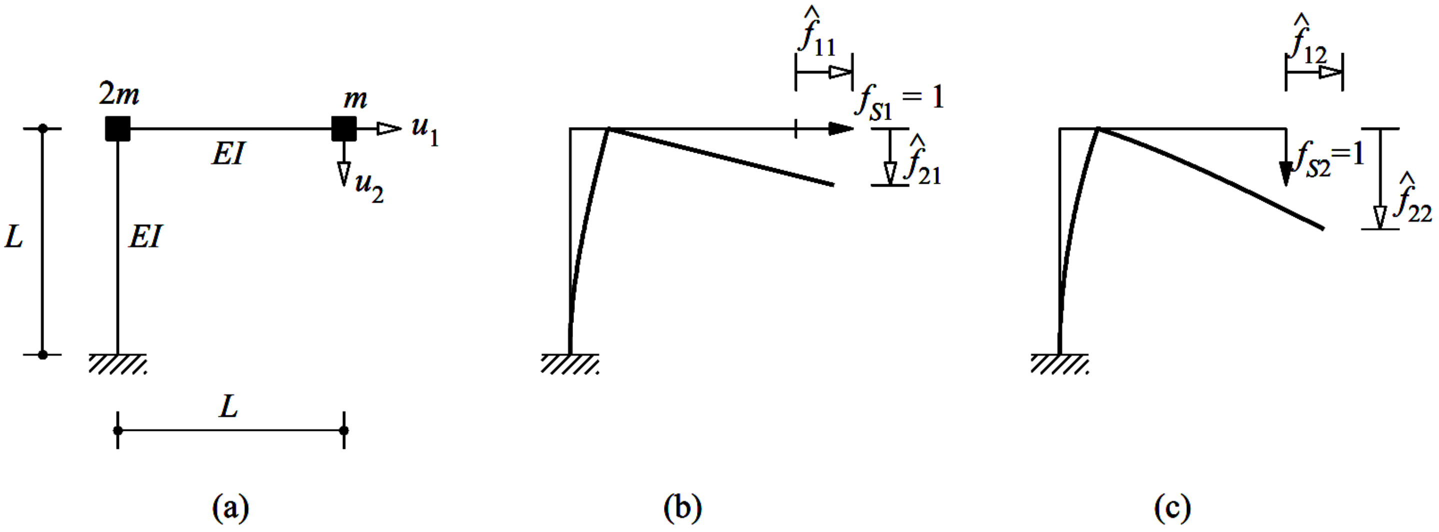


Figure E9.6

deflections are computed by standard procedures of structural analysis to obtain the flexibility matrix:

$$\hat{\mathbf{f}} = \frac{L^3}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

This matrix is inverted to determine the stiffness matrix:

$$\mathbf{k} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Thus the equations in free vibration of the system (without damping) are

$$\begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Example 9.2

A uniform rigid bar of total mass m is supported on two springs k_1 and k_2 at the two ends and subjected to dynamic forces shown in Fig. E9.2a. The bar is constrained so that it can move only vertically in the plane of the paper; with this constraint the system has two DOFs.

Formulate the equations of motion with respect to displacements u_1 and u_2 of the two ends as the two DOFs.

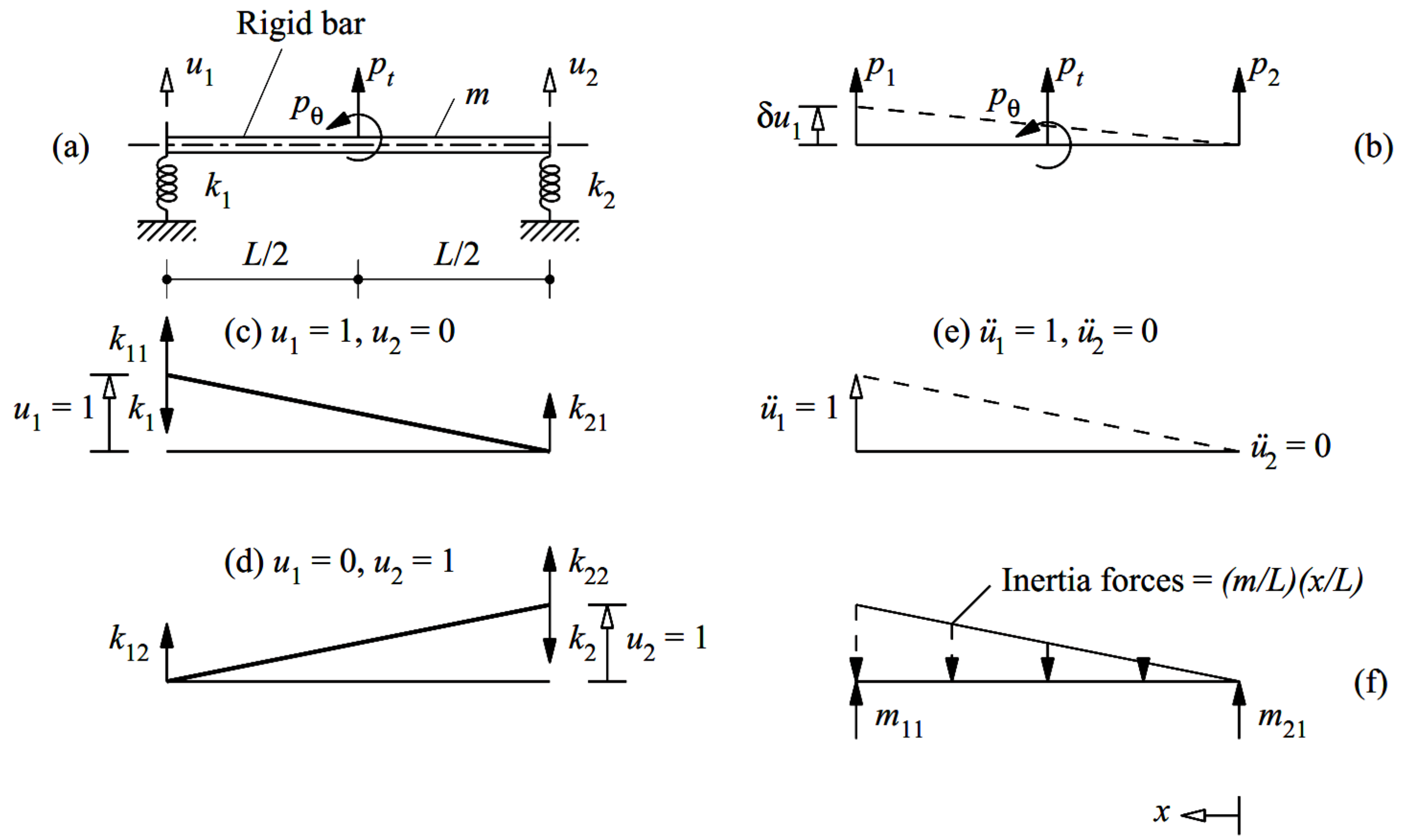


Figure E9.2

Solution

1. *Determine the applied forces.* The external forces do not act along the DOFs and should therefore be converted to equivalent forces p_1 and p_2 along the DOFs (Fig. E9.2b) using equilibrium equations. This can also be achieved by the principle of virtual displacements. Thus if we introduce a virtual displacement δu_1 along DOF 1, the work done by the applied forces is

$$\delta W = p_t \frac{\delta u_1}{2} - p_\theta \frac{\delta u_1}{L} \tag{a}$$

Similarly, the work done by the equivalent forces is

$$\delta W = p_1 \delta u_1 + p_2(0) \tag{b}$$

Because the work done by the two sets of forces should be the same, we equate Eqs. (a) and (b) and obtain

$$p_1 = \frac{p_t}{2} - \frac{p_\theta}{L} \tag{c}$$

In a similar manner, by introducing a virtual displacement δu_2, we obtain

$$p_2 = \frac{p_t}{2} + \frac{p_\theta}{L} \tag{d}$$

2. *Determine the stiffness matrix.* Apply a unit displacement $u_1 = 1$ with $u_2 = 0$ and identify the resulting elastic forces and the stiffness influence coefficients k_{11} and k_{21} (Fig. E9.2c). By statics, $k_{11} = k_1$ and $k_{21} = 0$. Now apply a unit displacement $u_2 = 1$ with $u_1 = 0$ and identify the resulting elastic forces and the stiffness influence coefficients (Fig. E9.2d). By statics, $k_{12} = 0$ and $k_{22} = k_2$. Thus the stiffness matrix is

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \tag{e}$$

In this case the stiffness matrix is diagonal (i.e., there are no coupling terms) because the two DOFs are defined at the locations of the springs.

3. *Determine the mass matrix.* Impart a unit acceleration $\ddot{u}_1 = 1$ with $\ddot{u}_2 = 0$, determine the distribution of accelerations of (Fig. E9.2e) and the associated inertia forces, and identify mass influence coefficients (Fig. E9.2f). By statics, $m_{11} = m/3$ and $m_{21} = m/6$. Similarly, imparting a unit acceleration $\ddot{u}_2 = 1$ with $\ddot{u}_1 = 0$, defining the inertia forces and mass influence coefficients, and applying statics gives $m_{12} = m/6$ and $m_{22} = m/3$. Thus the mass matrix is

$$\mathbf{m} = \frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{f}$$

The mass matrix is coupled, as indicated by the off-diagonal terms, because the mass is distributed and not lumped at the locations where the DOFs are defined.

4. *Determine the equations of motion.* Substituting Eqs. (c)–(f) in Eq. (9.2.12) with $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ gives

$$\frac{m}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_t/2) - (p_\theta/L) \\ (p_t/2) + (p_\theta/L) \end{bmatrix} \tag{g}$$

The two differential equations are coupled because of mass coupling due to the off-diagonal terms in the mass matrix.

Example 9.3

Formulate the equations of motion of the system of Fig. E9.2a with the two DOFs defined at the center of mass O of the rigid bar: translation u_t and rotation u_θ (Fig. E9.3a).

Solution

1. *Determine the stiffness matrix.* Apply a unit displacement $u_t = 1$ with $u_\theta = 0$ and identify the resulting elastic forces and k_{tt} and $k_{\theta t}$ (Fig. E9.3b). By statics, $k_{tt} = k_1 + k_2$ and $k_{\theta t} = (k_2 - k_1)L/2$. Now, apply a unit rotation $u_\theta = 1$ with $u_t = 0$ and identify the resulting elastic forces and $k_{t\theta}$ and $k_{\theta\theta}$ (Fig. E9.3c). By statics, $k_{t\theta} = (k_2 - k_1)L/2$ and $k_{\theta\theta} = (k_1 + k_2)L^2/4$. Thus the stiffness matrix is

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)L/2 \\ (k_2 - k_1)L/2 & (k_1 + k_2)L^2/4 \end{bmatrix} \tag{a}$$

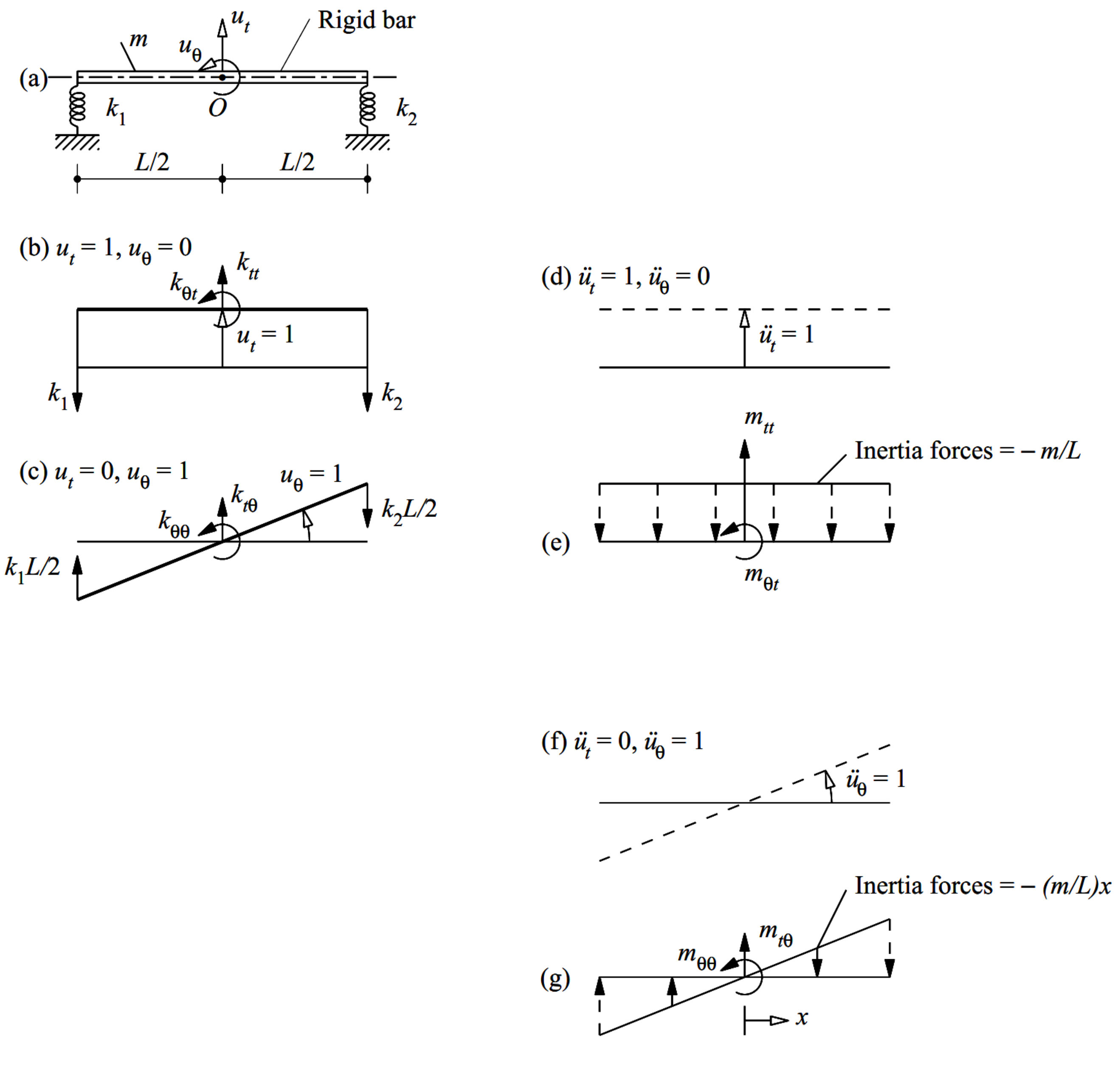


Figure E9.3

Observe that now the stiffness matrix has coupling terms because the DOFs chosen are not the displacements at the locations of the springs.

2. *Determine the mass matrix.* Impart a unit acceleration $\ddot{u}_t = 1$ with $\ddot{u}_\theta = 0$, determine the acceleration distribution (Fig. E9.3d) and the associated inertia forces, and identify m_{tt} and $m_{\theta t}$ (Fig. E9.3e). By statics, $m_{tt} = m$ and $m_{\theta t} = 0$. Now impart a unit rotational acceleration $\ddot{u}_\theta = 1$ with $\ddot{u}_t = 0$, determine the resulting accelerations (Fig. E9.3f) and the associated inertia forces, and identify $m_{t\theta}$ and $m_{\theta\theta}$ (Fig. E9.3g). By statics, $m_{t\theta} = 0$ and $m_{\theta\theta} = mL^2/12$. Note that $m_{\theta\theta} = I_O$, the moment of inertia of the bar about an axis that passes through O and is perpendicular to the plane of rotation. Thus the mass matrix is

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} \tag{b}$$

Now the mass matrix is diagonal (i.e., it has no coupling terms) because the DOFs of this rigid bar are defined at the mass center.

3. *Determine the equations of motion.* Substituting $\mathbf{u} = \langle\, u_t \quad u_\theta \,\rangle^T$, $\mathbf{p} = \langle\, p_t \quad p_\theta \,\rangle^T$, and Eqs. (a) and (b) in Eq. (9.2.12) gives

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2/12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_t \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)L/2 \\ (k_2 - k_1)L/2 & (k_1 + k_2)L^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_t \\ p_\theta \end{Bmatrix} \tag{c}$$

The two differential equations are now coupled through the stiffness matrix.

We should note that if the equations of motion for a system are available in one set of DOFs, they can be transformed to a different choice of DOF. This concept is illustrated for the system of Fig. E9.2a. Suppose that the mass and stiffness matrices and the applied force vector for the system are available for the first choice of DOF, $\mathbf{u} = \langle\, u_1 \quad u_2 \,\rangle^T$. These displacements are related to the second set of DOF, $\bar{\mathbf{u}} = \langle\, u_t \quad u_\theta \,\rangle^T$, by

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L/2 \\ 1 & L/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_\theta \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{u}} \tag{d}$$

where $\mathbf{a}$ denotes the coordinate transformation matrix. The stiffness and mass matrices and the applied force vector for the $\bar{\mathbf{u}}$ DOFs are given by

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{a}^T\mathbf{k}\mathbf{a} \qquad \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^T\mathbf{m}\mathbf{a} \qquad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{a}^T\mathbf{p} \tag{e}$$

Substituting for $\mathbf{a}$ from Eq. (d) and for $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$, and $\mathbf{p}$ from Example 9.2 into Eq. (e) leads to $\bar{\mathbf{k}}$ and $\bar{\mathbf{m}}$, which are identical to Eqs. (a) and (b) and to the $\bar{\mathbf{p}}$ in Eq. (c).